Nietrost Bernhard bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Bremsen eines Formel 1 Autos

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Differentialgleichung 1.Ordnung (Aufstellen mit Ansatz von Newton, Trennen der Variablen, direkt integrierbar, numerische Lösung), graphische Darstellung der Lösung (auch in Parameterform)

- Kurzzusammenfassung

  Aufstellen und Lösen einer Differentialgleichung mit praktischem Hintergrund

- Didaktische Überlegungen

  Praktischer Bezug, leicht verständliche Aufgabenstellung und Problemformulierung, analytische Lösung aufwändiger aber durch Numerik ersetzbar. [je nach Tiefe eine oder zwei Doppelstunden]

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 4. Jahrgang, alle Abteilungen, besonders Maschinenbau, Maschineningenierwesen und Mechatronik

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

- Literaturangaben:

  Internet, vor allem für technische Daten

Bremsvorgang in der Formel 1 mit Luftwiderstand und Abtrieb

Die Vorgeschichte zu diesem Beispiel ist eine Aussage des legendären ORF Sportreporters und bekennenden Formel 1 Fans Heinz Prüller vom 11.September 2002:

"Ein Formel 1-Auto bremst innerhalb einer Strecke von $s_1 = 100\text{m}$ von $v_A = 350\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $v_E = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ".

Mit der Schulphysik scheint dies aber nicht erklärbar zu sein, liefert doch die bekannte Formel der Kinematik $v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot s$ eine gleichmäßige Bremsbeschleunigung von $\frac{v_E^2 - v_A^2}{2 \cdot s_1} = -45.872\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oder die ca. 4,5 - fache Erdbeschleunigung. Da aber im Straßenverkehr ein Haftreibungsbeiwert von $\mu = 1$ entsprechend einer Bremsbeschleunigung von 1 g als bestmöglich - und praktisch nicht erreichbar - gilt, ist dies doch sehr erstaunlich und mancher denkt bei diesem Unterschied an Heinz Prüllers Ruf zwar viel zu wissen aber noch mehr zu erzählen.

Zur Ehrenrettung der Reporterlegende ist hier allerdings die verwendete Formel schlicht und einfach falsch, da die Annahme einer gleichmäßigen Bremsbeschleunigung im Formel 1 Sport auf Grund der hohen Geschwindigkeiten und der daraus resultierenden aerodynamischen Eigenschaften nicht erfüllt ist.

1. Aufstellen der DGL eines bremsenden F1 Autos

Die auf das Auto in x-Richtung wirkenden Kräfte werden bestimmt und als Gleichung entsprechend dem 2.Newton'schen Gesetz (F_{res} = m . a) angeschrieben.

In x-Richtung bremst die Reibung und der Luftwiderstand, die beide daher mit negativem Vorzeichen zu verwenden sind. Es gibt keine beschleunigenden Kräfte.

$$m \cdot a = -F_R - F_{Luft}$$

Die Anfangsbedingungen zur Zeit t = 0 : Das Auto bewegt sich mit maximaler Geschwindigkeit $v = v_{max}$ und der Weg ist zu diesem Zeitpunkt s = 0.

1.1 Mathematische Beschreibung der wirkenden Käfte

Der Luftwiderstand wird durch die bekannte Formel als Newton'schen Reibung beschrieben.
Zentrale Eigenschaft ist die quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Die weiteren Größen sind konstant in SI Einheiten:

ρ... Dichte der Luft
A... angeströmte Fläche
c_W....Luftwiderstandsbeiwert (Formfaktor)

$$F_{Luft} = \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2} \cdot v^2$$

Bei der Reibung ($F_R = F_N \cdot \mu$) besteht die Normalkraft zusätzlich zur Gewichtskraft noch aus einem geschwindigkeitsabhängigen Anteil durch den Abtrieb des Fahrzeugs. Der Abtrieb entsteht aus der Aerodynamik des Fahrzeugs vornehmlich durch die Front und Heckflügel und wirkt senkrecht nach unten. Auch hier liegt ähnlich zum Luftwiderstand eine quadratisch mit der Geschwindigkeit ansteigende Kraft vor. Es gibt auch hier einen - mir leider nicht bekannten - formabhängigen Beiwert.
Als Alternative steht die vielen Formel I Fans bekannte Tatsache, dass ein F I Auto ab ca.150 - 200 km/h an der Decke eines Raumes fahren kann, zur Verfügung. Anders ausgedrückt bedeutet dies bei dieser Geschwindigkeit (v_M) ist der Abtrieb ungefähr gleich der Gesichtskraft.
Damit kann für die Reibungskraft folgende Formel verwendet werden:

$$F_R = m \cdot \left(1 + \frac{v^2}{{v_M}^2}\right) \cdot g \cdot \mu$$

Der Ausdruck $\left(1 + \frac{v^2}{{v_M}^2}\right)$ berücksichtigt die scheinbare Zunahme der Masse durch den Abtrieb.

Der Nenner v_M ist jene Geschwindigkeit, bei welcher der Auftrieb gleich der Gewichtskraft ist und daher die eine Verdopplung der Normalkraft eintritt.

Die DGL lautet daher nach Einsetzen der obigen Formeln und Verwendung der Beschleunigung in differentieller Form ($a = \frac{dv}{dt}$):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -m \cdot \left(1 + \frac{v^2}{{v_M}^2}\right) \cdot g \cdot \mu - \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2} \cdot v^2$$

Division durch die Masse liefert:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(1 + \frac{v^2}{{v_M}^2}\right) \cdot g \cdot \mu - \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2 \cdot m} \cdot v^2$$

Herausheben von $-g \cdot \mu$ auf der rechten Seite und danach teilweise von v² ergibt:

$$\frac{dv}{dt} = -g \cdot \mu \cdot \left(1 + \frac{v^2}{{v_M}^2} + \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2 \cdot m \cdot g \cdot \mu} \cdot v^2\right) = -g \cdot \mu \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{{v_M}^2} + \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2 \cdot m \cdot g \cdot \mu}\right) \cdot v^2\right]$$

Eine Vereinfachung bringt die Verwendung von $K = \frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2 \cdot m \cdot g \cdot \mu} + \frac{1}{{v_M}^2}$ als Abkürzung für die vielen Konstanten.
Man erhält die übersichtlichere Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v(t):
(Klassifizierung: 1.Ordnung und 2.Grades mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität:)

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g \cdot \mu \cdot \left(1 + K \cdot v(t)^2\right)$$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_{max}$.

2. Lösung der DGL

$$\int \frac{1}{1+K\cdot v^2}\,dv = \int -g\cdot\mu\,dt$$

Trennen der Variablen

$$\int \frac{1}{1+K\cdot v^2}\,dv \rightarrow \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}}\cdot \operatorname{atan}\left(K^{\frac{1}{2}}\cdot v\right)$$

Integration beider Seiten

$$\int -g\cdot\mu\,dt \rightarrow -g\cdot\mu\cdot t$$

$$\frac{1}{\sqrt{K}}\cdot\operatorname{atan}\left(\sqrt{K}\cdot v\right) = C_V - t\cdot g\cdot\mu$$

Einsetzen der Ergebnisse (inclusive der Integrationskonstante C_v) liefert die allgemeine implizite Lösung. Durch Umformen erhält man die allgemeine explizite Lösung.

$$\frac{1}{\sqrt{K}}\cdot\operatorname{atan}\left(\sqrt{K}\cdot v\right) = C_V - t\cdot g\cdot\mu \text{ auflösen}, v \rightarrow \frac{\tan\left(C_V\cdot K^{\frac{1}{2}} - g\cdot\mu\cdot t\cdot K^{\frac{1}{2}}\right)}{K^{\frac{1}{2}}}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $v(0) = v_{max}$ in die implizte Lösung ergibt die Konstante C_v:

$$\frac{1}{\sqrt{K}}\cdot\operatorname{atan}\left(\sqrt{K}\cdot v\right) = C_V - t\cdot g\cdot\mu \;\left|\; \begin{array}{l}\text{ersetzen}, t = 0\\ \text{ersetzen}, v = v_{max}\end{array}\right. \rightarrow \frac{1}{K^{\frac{1}{2}}}\cdot\operatorname{atan}\left(K^{\frac{1}{2}}\cdot v_{max}\right) = C_V$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$v = \frac{1}{\sqrt{K}}\cdot\tan\left[\sqrt{K}\cdot\left(C_V - t\cdot g\cdot\mu\right)\right] \qquad C_V = \frac{1}{\sqrt{K}}\cdot\operatorname{atan}\left(\sqrt{K}\cdot v_{max}\right)$$

2.1. Bestimmen des zurückgelegten Weges s

Die soeben erhalten Lösung kann durch die differentielle Schreibweise der Geschwindigkeit ($v = \frac{ds}{dt}$) in eine direkt integrierbare DGL umgewandelt werden.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \tan\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]$$

Trennen der Variablen und Integration der rechten Seite liefert den Weg s(t).

$$s = \int \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \tan\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right] dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \tan\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right] dt \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot \frac{\ln\left[1 + \tan\left[K^{\frac{1}{2}} \cdot \left(C_V - g \cdot \mu \cdot t\right)\right]^2\right]}{K \cdot g \cdot \mu}$$

$$s = \frac{\ln\left[\cos\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]\right]}{K \cdot g \cdot \mu} + C_S$$

Weg mit Integrationskonstante C_s in expliziter allgemeiner Form;

Einsetzen der Anfangsbedingung sowie anschließendes Umformen nach C_s.

$$s = \frac{\ln\left[\cos\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]\right]}{K \cdot g \cdot \mu} + C_S \;\left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, t = 0\\ \text{ersetzen}, s = 0\end{array}\right. \rightarrow 0 = \frac{\ln\left(\cos\left(C_V \cdot K^{\frac{1}{2}}\right)\right)}{K \cdot g \cdot \mu} + C_S$$

$$0 = \frac{\ln\left(\cos\left(C_V \cdot \sqrt{K}\right)\right) + C_S \cdot K \cdot \mu \cdot g}{K \cdot \mu \cdot g} \text{ auflösen}, C_S \rightarrow \frac{-\ln\left(\cos\left(C_V \cdot K^{\frac{1}{2}}\right)\right)}{K \cdot g \cdot \mu}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$s = \frac{\ln\left[\cos\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_V - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]\right]}{K \cdot g \cdot \mu} + C_S$$

$$C_S = -\frac{\ln\left(\cos\left(\sqrt{K} \cdot C_V\right)\right)}{K \cdot g \cdot \mu}$$

3. Zeichnen der Lösung

3.1 Definition der Zahlenwerte

Technische Daten:

- Masse eines F I Autos: $m := 620$ kg
- Reibungsbeiwert: $\mu := 1.6$ (beachtlich im Vergleich zum normalen Straßenverkehr, nur bei warmgefahrenen Reifen und trockener Fahrbahn)
- angeströmte Fläche: $A := 1.7$ m² (Querschnitt lt. Reglement 180 x 90 cm)
- Luftwiderstandsbeiwert $c_W := 1.2$ (sehr schlecht im Vergleich zu Autos, die ca. c_W= 0,3 haben; aber der Abtrieb ist wichtig für die Bremsmanöver und die Kurvengeschwindigkeit, die Beschleunigung und Topspeed wird durch die hohe Leistung erreicht)
- Abtriebsgeschwindigkeit für scheinbar doppelte Masse: $v_M := 50$ m/s (180km/h)
- Maximalgeschwindigkeit: $v_{max} := 97$ m/s (350 km/h)

Weitere Konstanten:

- Erdbeschleunigung: $g := 9.81$ m/s
- Dichte der Luft: $\rho := 1.3$ kg/m³ (von Temperatur und Druck abhängig, Durchschnittswert)

3.2 Definition der Funktionen und der Integrationskonstanten

$$K := \left(\frac{\rho \cdot A \cdot c_W}{2 \cdot m \cdot g \cdot \mu} + \frac{1}{v_M^{\,2}}\right) \qquad K = 5.363 \times 10^{-4}$$

$$C_v := \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{K} \cdot v_{max}\right) \qquad C_v = 49.745$$

$$C_s := -\frac{\ln\left[\cos\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_v\right)\right]\right]}{K \cdot g \cdot \mu} \qquad C_s = 106.886$$

$$v(t) := \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \tan\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_v - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]$$

$$s(t) := \frac{\ln\left[\cos\left[\sqrt{K} \cdot \left(C_v - t \cdot g \cdot \mu\right)\right]\right]}{K \cdot g \cdot \mu} + C_s$$

Um die Beschleunigung a(t) zu finden muss v(t) nach der Zeit ableitet werden.

$$a(t) := \frac{d}{dt} v(t) \text{ gleit}, 3 \;\rightarrow -15.7 - 15.7 \cdot \tan(-1.15 + .363 \cdot t)^{2.}$$

Die Dauer des Bremsvorganges T - bis zum Stillstand - erhält man durch Nullsetzen der Geschwindigkeit bzw. einfacher und analytisch aus dem Klammerausdruck im Tangens. Damit kann die Zeit für die graphische Darstellung definiert werden.

$v(t)$ auflösen , t $\rightarrow 3.1692669392055368833$

$T := \frac{C_V}{g \cdot \mu}$ $T = 3.169$ $t := 0, 0.01 .. T$

3.3 Numerische Lösung mit Lösungsblock

Als Alternative zur eher langwierigen analytischen Lösung steht natürlich der auch der Lösungsblock zur Verfügung. Der Endwert für die Berechnung der numerischen Lösung kann durch Probieren bestimmt werden oder einfacher durch die (uns bereits bekannte) Dauer des Bremsmanövers T.

Vorgabe

$\frac{d}{dt} vn(t) = -g \cdot \mu \cdot \left(1 + K \cdot vn(t)^2\right)$ $vn(0) = v_{max}$

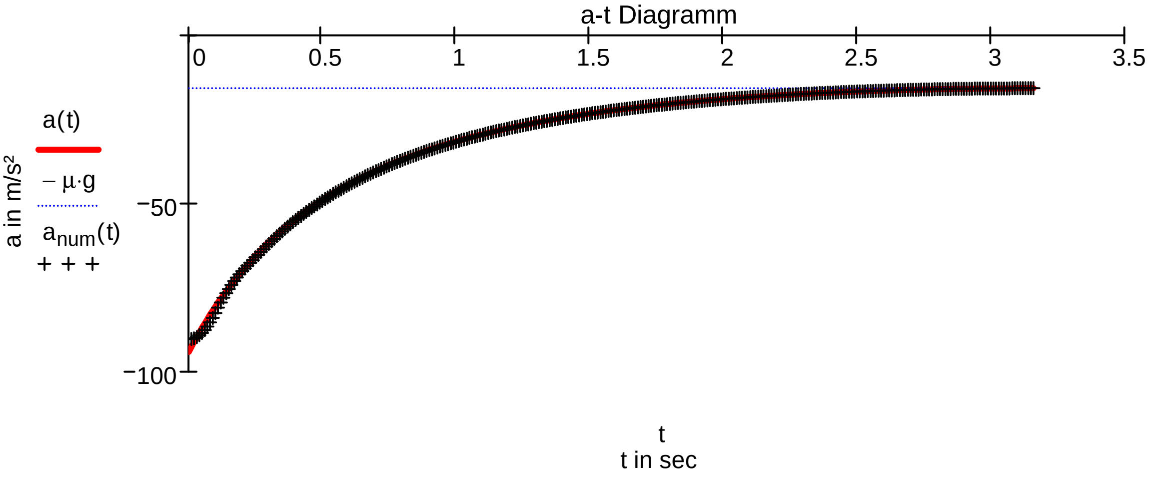
$v_{num} := \text{Odesolve}(t, T)$

Die weiteren Größen Beschleunigung und Weg werden numerisch durch Differenzieren und Integrieren bestimmt.

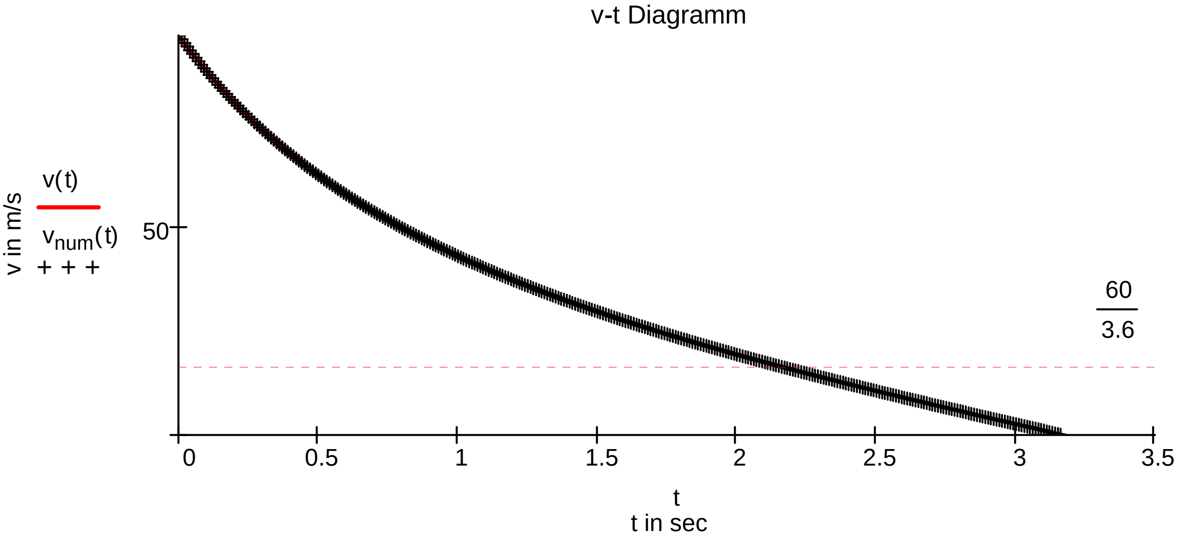
$a_{num}(t) := \frac{d}{dt} v_{num}(t)$ $s_{num}(t) := \int_0^t v_{num}(tt)\, dtt$

3.4 Graphische Darstellung der Lösungen

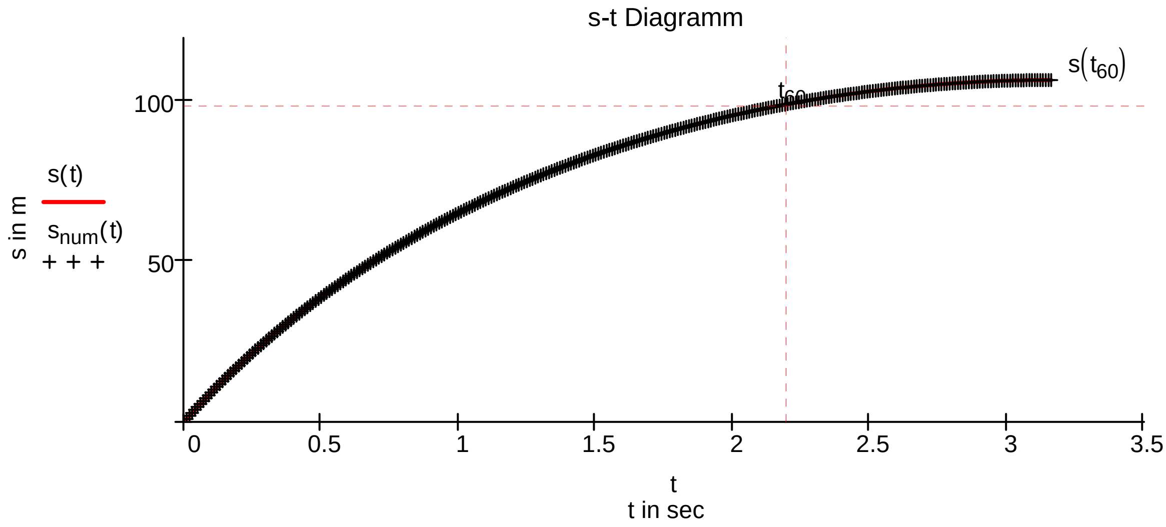
Das Beschleunigungs - Zeit Diagramm zeigt die Bremsbeschleunigung a(t).
Numerische (schwarze Kreuze) und analytische Lösung stimmen sehr gut überein.
Deutlich erkennbar ist der Einfluss des Abtriebs am Anfang. Bei maximaler Geschwindigkeit sind laut Rechnung bis zu 90 m/s² oder 9 g möglich. Vor allem die den Kopf des Fahrers stützende Nackenmuskulatur muss in Lage sein, die auftretenden Trägheitskräfte aufzufangen.
In der Folge nimmt der Abtrieb deutlich ab und die Kurve nimmt beim Stillstand des Fahrzeuges (t = T) den Wert $\mu \cdot g = 15.696$ m/s² an.



Das Geschwindigkeits - Zeit Diagramm zeigt vor allem am Anfang (hohe Bremsbeschleunigung) eine starke Abnahme, zum Ende des Bremsmanövers erscheint die Kurve fast linear.
Die numerische (schwarze Kreuze) und die analytische Lösung stimmen sehr gut überein.
Die rot strichlierte Linie zeigt die von Heinz Prüller erwähnte Endgeschwindigkeit nach dem Bremsvorgang, die nach ca. $t_{60} := v\left(t_{60}\right) = \frac{60}{3.6} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t_{60} \\ \text{gleit}, 2 \end{array} \right. \rightarrow 2.2$ sec erreicht wird.



Das Weg - Zeit Diagramm zeigt den gesamten Bremsweg $s(T) = 106.886$ m und markiert die Strecke bis die Geschwindigkeit auf 60 km/h reduziert wurde $s(t_{60}) = 99.355$ m.



Im Geschwindigkeits - Weg Diagramm erkennt man den Bremsweg von ca. 100 m aus einer Geschwindigkeit von 350 km/h auf 60 km/h. Der Verlauf der Geschwindigkeit ist hier über einen weiten Bereich fast linear.
Die numerische (schwarze Kreuze) und die analytische Lösung stimmen sehr gut überein.